תורת החבורות (Group Theory)

# ספרים

* אוניברסיטה פתוחה – מבנים אלגברים
* יונתן גולן – אלגברה מודרנית
* J. Rotman
* L. Rowen

1. הגדרה ותכונות בסיסיות

# הגדרה

חבורה היא קבוצה G עם פעולה המקיימת אקסיומות:

1. סגירות: לכל (לאו דווקא שונים)
2. קיבוציות(אסוציאטיביות):
3. קיום יחידה: קיים איבר כך שלכל
4. קיום הופכי: לכל קיים כך ש כאשר e יחידה

## הערה

אם אין את (ד) זה נקרא אגודה. אם אין את (ג) זה נקרא מונואיד.

# תכונה 1

לכל איבר קיים הופכי יחיד

## הוכח

לכל איבר קיים הופכי לפי אקסיומה (ד). נניח שקיימים שני הופכיים ל. נסמנם . מ"ל .  
אכן,

# סימון

## נסמן את ההופכי של

### הערה

לפי תכונה 1, יש משמעות מוגדרת היטב לסימון זה

# תכונה 2

בכל חבורה G, קיים איבר יחידה יחיד.

## הוכחה

לפי אקס. (ג) יש איבר יחידה בG. יהיו איברי יחידה. מ"ל .  
אז

# סימון

נסמן את איבר היחידה של החבורה G ב.

אם ברור לאיזו חבורה מתייחסים נסמן .

# הגדרה 2

חבורה G עם פעולה \* המקיימת לכל , נקראת חבורה אבלית(Abelian Group)

1. דוגמאות

## - מספרים טבעיים

פעולה - (חיבור).  
אין איבר יחידה, ולכן זו אינה חבורה.

## עם חיבור

אין הופכי, ולכן זו אינה חבורה

השלמים ביחס לחיבור היא חבורה אבלית אינסופית

1. ביחס לכפל אינה חבורה
2. שאלה – האם הרציונלית חבורה?  
   תשובה:
   1. ביחס לחיבור זו חבורה אבלית אינסופית שנקראת
   2. ביחס לכפל אינה חבורה, כי לאפס אין הופכי.
   3. אבל, היא חבורה אבלית(אינסופית)(נקרא חבורה כפלית)
3. רציונליים
   1. חבורה אבלית אינסופית
   2. חבורה אבלית אינסופית.
4. מרוכבים
   1. חבורה אבלית אינסופית
   2. חבורה אבלית אינסופית.

# 6) עובדה כללית

בהינתן שדה , החבורה החיבורית של היא חבורה אבלית.

אינו חבורה ביחס לכפל(כי לאפס אין הופכי) אבל החבורה הכפלית של

## הערה

בפרט, אם שדה סופי ו חבורות אבליות סופיות.

# 7) שאלה

יהי n מספר טבעי. האם קיימת חבורה G שסדרה הוא n (כלומר )?

## התשובה חיובית

## הגדרה

עם חיבור מודולו n.

## עובדה

לכל n טבעי חבורה אבלית(סופית)

## הערה חשובה

אין חבורה ריקה כי איבר היחידה נמצא תמיד בחבורה.

# שאלה

האם יש חבורה מסדר 1?

# הגדרה

החבורה הטריוויאלית היא חבורה אבלית

1. דוגמאות לחבורות לא אבליות

# מטריצות

*היא חבורה אבלית ביחס לחיבור מטריצות*

***הערה:*** *כל מרחב וקטורי הוא חבורה אבלית ביחס לחיבורי וקטורים.*

***עובדה****: אינה חבורה ביחס לכפל מטריצות כי לכל מטריצה עם דט. אפס אין הופכי.*

# הגדרה

## עובדה

חבורה

## הוכחה

1. סגירות – לכל .  
   מסקנה:
2. אסוציאטיביות – כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי
3. קיום יחידה -
4. קיום הופכי: משפט מאלגברה לינארית - אם אז A הפיכה

# האם אבלית?

הערה: עבור אבלית.

## טענה

עבור אינה אבלית.

## הוכחה(עבור )

## עבור n כללי

הערה

נקראת החבורה הלינארית הכללית מעל שדה (general linear group)

# עוד דוגמה לחבורה שאינה אבלית

## תרגילים

1. הראה חבורה
2. הראה אינה אבלית עבור

## הערה

נקראת החבורה הליניארית המיוחדת מעל שדה (special linear group)

# עובדה

אם שדה סופי, , אזי ו חבורות סופיות שאינן אבליות

# דוגמה נוספת לחבורה סופית שאינה אבלית

# הגדרה

תמורה על האותיות היא העתקה חח"ע ועל מ ל:  
 חח"ע ועל תמורה.  
רושמים:

קבוצת כל התמורות מ ל

## דוגמאות

***עובדה:***

# טענה

*עם פעולת הרכבת פונקציות היא חבורה.*

## "הוכחה"

1. סגירות – כי הרכבת פונקציות חח"ע ועל היא פונקציה הופכית
2. קיום יחידה – תמורת הזהות
3. קיום הופכי – להעתקה חח"ע ועל יש העתקה הפכית חח"ע ועל.
4. אסוציאטיביות – בדוק

# הגדרה

ביחס להרכבת פונקציות נקראת החבורה הסימטרית על n אותיות

# טענה

עבור אינה אבלית.

## הוכחה(עבור )

מאידך

עבור n כללי: אינן מתחלפות

## הערה

זוהי הדוגמה שפתחה את המחקר בתורת החבורות